Referát z předmětu Úvod do teoretické informatiky

Téma: Predikátová logika prvního řádu PL1

VŠB-TU Ostrava:Fakulta Elektrotechniky a informatiky

březen 2008

Martin Dočkal
doc068
dockal.martin.st@vsb.cz

Obsah

Zadání

Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů:

1. Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.
2. Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.
3. Neexistuje x takové, že je větší nebo rovno než všechna y.
4. Ke každému číslu x existuje číslo y takové, že je-li x přirozené, pak není větší.

Teoretický rozbor

Predikátová logika

V matematice a logice se pojmem predikátová logika označuje formální odvozovací systém používaný k popisu matematických teorií a vět.

Predikátová logika je rozšířením výrokové logiky (ta nedokáže vyjádřit některá složitější tvrzení o matematických strukturách). Do této logiky přidává kvantifikátory a vztah predikát-individuum. Individuum je prvek z nějaké množiny a predikát je relace na této množině.

$$\neg \bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg P(x)$$

$$\neg \bigwedge_x \neg P(x) \Leftrightarrow \bigvee_x P(x)$$

$$\neg \bigvee_x P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg P(x)$$

$$\neg \bigvee_x \neg P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x P(x)$$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y P(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x P(x,y)$$

$$\bigvee_x \bigwedge_y P(x,y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x P(x,y)$$

$$\bigwedge_x P(x) \Rightarrow P(x)$$

$$P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x)$$

Místo $\wedge$ (resp.) $\vee$ se často používá $\exists$ x (resp.) $\forall$ x, kde $\exists$ je existenční kvantifikátor a $\forall$ je univerzální kvantifikátor.

Predikátová logika prvního řádu

Predikátová logika prvního řádu je predikátová logika, která dovoluje používání kvantifikovaných tvrzení ve tvaru „existuje x tak, že…“ () nebo „pro každé x platí…“ (), pokud je x individuem a ne predikátem. Pokud bychom dovolili kvantifikování predikátů, nejedná se o predikátovou logiku prvního, ale vyššího řádu.

I přes tato omezení je ale tato logika schopna formalizovat mnohá tvrzení teorie množin.Výroková logika se skládá ze
- syntaktických pravidel (určují, kdy je formule správně utvořená)
- odvozovacích pravidel
- (nejvýše spočetné) množiny axiomů a axiomatických schémat.

Predikátová logika je jejím rozšířením.

Abeceda

Abeceda se skládá z :
- velkých písmen P, Q, R,… značících predikátové proměnné.
- malých písmen a, b, c,… značících konstanty (vyjadřující se o individuích).
- malých písmen x, y, z,… značících proměnné (vyjadřující se o individuích).
- malých písmen f, g, h,… značících funkční proměnné.
- symbolů označujících logické operátory: $\neg$ (negace), $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\Rightarrow$ (implikace), $\Leftrightarrow$ (ekvivalence).
- symbolů označujících kvantifikátory: $\forall$ (univerzální kvantifikátor), $\exists$ (existenční kvantifikátor).
- levé a pravé závorky .

Některé z těchto symbolů nejsou pro vyjádření nutné, například (P $\leftrightarrow$ Q) je zkrácením (P $\rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\rightarrow$ P). Ve skutečnosti dokážeme všechny logické operátory vyjádřit pomocí operátoru NAND a kvantifikátor pomocí $\neg$.

Kvantifikátor

Kvantifikátory jsou symboly používané v matematice a logice (predikátové logice). Slouží pro vyjadřování míry přítomnosti dané vlastnosti (predikátu) v jisté třídě objektů. Rozlišují se dva základní druhy kvantifikátorů – univerzální ($\forall$) s významem „pro každý“ a existenční ($\exists$) s významem „existuje“.

Jak bylo řečeno výše, kvantifikátory vždy referují o objektech, jimž přisuzují nějaké vlastnosti. Nabízejícím se zobecněním je umožnění kvantifikace vlastností, tj. výrazů typu: „Pro každou vlastnost platí, že…“ či „Existuje vlastnost, že…“. Takovéto zobecněné kvantifikátory se nazývají kvantifikátory vyšších řádů.

Fakt, že existuje *x* splňující tvrzení φ lze alternativně vyjádřit tak, že není pravda, že každé *x* nesplňuje φ. Platí tedy : $\exists \equiv \neg\forall\neg$ popřípadně naopak $\forall \equiv \neg\exists\neg$

Logické operace

Logická operace je v matematice taková operace s výroky, jejíž výsledkem je opět výrok, jehož pravdivostní hodnota (PRAVDA nebo NEPRAVDA) závisí na pravdivosti výroků a druhu operace.

Základní unární logickou operací je negace. Základními binárními operacemi jsou konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Pomocí nich si můžeme definovat tyto vzniklé De Morganovy zákony:

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \supset B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$A \supset B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Řešení

---

1. Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.

$\exists x : A(x) \wedge B(x, x^2)$

kde $A(x)$ značí vztah „x reálné číslo“ a $B(x, y)$ pak vztah „x je menší než y“.

---

2. Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.

$\neg\forall x \neg : A(x) \wedge B(x, x^2)$

kde $A(x)$ značí vztah „x je reálné číslo“ a $B(x, y)$ pak vztah „x je menší než y“.

Úpravy:

$\neg\forall x \neg : A(x) \wedge B(x, x^2) = \exists x : A(x) \wedge B(x, x^2)$

---

3. Neexistuje x takové, že je větší nebo rovno než všechna y.

$\neg\exists x \forall y : A(x) \wedge B(x, y)$

kde $A(x)$ značí vztah „x je reálné číslo“ a $B(x, y)$ pak vztah „x je větší nebo rovno než y“.

Úpravy:

$\neg\exists x \forall y : A(x) \wedge B(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y : \neg A(x) \vee \neg B(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y : A(x) \supset \neg B(x, y)$

kde jsme postupně v tomto pořadí použili: negaci, 4. DM zákon.

---

4. Ke každému číslu x existuje číslo y takové, že je-li x přirozené, pak není větší.

$\forall x \exists y : A(x) \supset \neg B(x, y)$

kde $A(x)$ značí vztah „x je přirozené číslo“ a $B(x, y)$ pak vztah „x je větší nebo rovno než y“.

Závěr

V našem zadání jsme ukázali vzájemnou ekvivalenci mezi jednotlivými větami (dvojicemi) a to užitím jak zákonů De Morganovými, tak negací celého výrazu pro odstranění počáteční negace před kvantifikátorem.