Zápočtový projekt z předmětu Vybrané partie z matematické analýzy

Jméno **Martin Dočkal**
Login **doc068**
Zadání **6**

1) Najděte všechna řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' = 2xy + x^3$$

Řešení

$y' = 2xy + x^3$

$y' = 2xy$

$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \therefore \quad \cdot \frac{1}{y} \;, \qquad \cdot dx$

$\frac{1}{y} dy = 2x\, dx$

$\int \frac{1}{y} = 2 \int x\, dx$

$\ln y = x^2$

$\underline{\underline{y = e^{x^2}}}$

$y_H = c \cdot y \quad (c \in R)$

$\underline{\underline{y_H = c \cdot e^{x^2}}} \quad (c \in R)$

$y_P = c(x) \cdot e^{x^2}$

$\left(c(x) \cdot e^{x^2}\right)' = 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} + x^3$

$c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} + x^3 \quad \therefore \; -2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2}$

$c'(x) \cdot e^{x^2} = x^3$

$c'(x) = \frac{x^3}{e^{x^2}}$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{x^3}{e^{x^2}}\, dx = \int x^3 \cdot e^{-x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{matrix} \right| = \int t \cdot x \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t \cdot e^{-t} dt$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} t \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \int e^{-t}\, dt = -\frac{1}{2} t \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \cdot (-t - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{-x^2} \cdot (-x^2 - 1)}}$$

$y_P = c(x) \cdot e^{x^2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} e^{-x^2} \cdot (-x^2 - 1)\, e^{x^2}}}$

$y = y_P + y_H$

$y = \frac{1}{2} e^{-x^2} \cdot (-x^2 - 1)\, e^{x^2} + c \cdot e^{x^2} \quad (c \in R)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(-x^2 - 1)\ + c \cdot e^{x^2}}} \quad (c \in R)$

2) Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$y'' + y = 2\sin x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$$

Řešení

$\underline{y'' + y = 0}$

$\Lambda^2 + \Lambda^0 = 0$

$\Lambda^2 + 1 = 0$

$\overline{\mathrm{D} = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4}$

$\Lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2\mathrm{i}}{2} = \begin{cases} \Lambda_1 = \mathrm{i}, \\ \Lambda_2 = -\mathrm{i}, \end{cases}$

$\Rightarrow \Lambda_1 = \mathrm{i}\,,\ \Lambda_2 = -\mathrm{i}$

$\Rightarrow \mathrm{y}_1 = \mathrm{e}^{\Lambda \mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{ix}}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{a+bi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{a}}(\cos \mathrm{b} + \mathrm{i} \sin \mathrm{b})$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{0+\mathrm{ix}} = \mathrm{e}^{0}(\cos \mathrm{x} + \mathrm{i}\sin \mathrm{x}) = \cos \mathrm{x} + \mathrm{i}\sin \mathrm{x}$

$\mathrm{y_H} = \mathrm{c}_1 \cos \mathrm{x} + \mathrm{c}_2 \sin \mathrm{x}$

$\mathrm{y_P} = \mathrm{c}_1(\mathrm{x}) \cdot \cos \mathrm{x} + \mathrm{c}_2\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x}$

$\mathrm{c}_1'(\mathrm{x}) \cdot \cos \mathrm{x} + \mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x} = 0$

$\underline{-\mathrm{c}_1'(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x} + \mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) \cdot \cos \mathrm{x} = 2\sin \mathrm{x}}$

$\mathrm{c}_1'(\mathrm{x}) \cdot \cos \mathrm{x} = -\mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x}$

$\mathrm{c}_1'(\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}}$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x} \cdot \sin \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}} + \mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) \cdot \cos \mathrm{x} = 2\sin \mathrm{x} \qquad \therefore \cdot \cos \mathrm{x}$

$\mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin^2 \mathrm{x} + \mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) \cdot \cos^2 \mathrm{x} = 2\sin \mathrm{x}\ \cdot \cos \mathrm{x}$

$\mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) \cdot (\sin^2 \mathrm{x} + \cos^2 \mathrm{x}) = \ 2\sin \mathrm{x}\ \cdot \cos \mathrm{x}$

$\mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) = \frac{2\sin \mathrm{x}\ \cdot \cos \mathrm{x}}{(\sin^2 \mathrm{x} + \cos^2 \mathrm{x})}$

$\underline{\underline{\mathrm{c}_2'(\mathrm{x}) = \ 2\sin \mathrm{x}\ \cdot \cos \mathrm{x}}}$

$\Rightarrow \mathrm{c}_1'(\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{c}_2'\,(\mathrm{x}) \cdot \sin \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}} = -2\sin \mathrm{x}\ \cdot \cos \mathrm{x} \cdot \frac{\sin \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}} = -2\sin^2 \mathrm{x}$

$$c_1(x) = -2\int \sin^2 x \ dx = -2\int \sin x \cdot \sin x \ \ dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & v' = \sin x \\ u' = \cos x & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \cos x \ dx$$

$$\int \cos x \cdot \cos x \ dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & v' = \cos x \\ u' = -\sin x & v = \sin x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x \ \ dx$$

$$\int \sin x \cdot \sin x \ \ dx = I$$

$$-2I = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \cos x \ dx$$

$$-2I = -\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x \ \ dx$$

$$-2I = -\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x + I \qquad \therefore \ -I$$

$$-3I = -\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x$$

$$-3I = 0$$

$$I = 0$$

$$\underline{\underline{c_1(x) = 0}}$$

$$c_2(x) = 2\int \sin x \ \cdot \cos x \ dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = \dfrac{dt}{-\sin x} \end{vmatrix} = -2\int \sin x \cdot t \cdot \frac{dt}{-\sin x} = 2\int t \ dt = t^2 = \cos^2 x$$

$$y_P = c_1(x) \cdot \cos x + c_2\,(x) \cdot \sin x$$

$$y_P = 0 \cdot \cos x + \cos^2 x \cdot \sin x$$

$$y_P = \cos^2 x \cdot \sin x$$

$$y_P = y_H + y_P$$

$$\underline{\underline{y_P = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos^2 x \cdot \sin x}}$$

Dosazení podmínek ze zadání

a) pro $\mathbf{y(0) = 2}$

$$2 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + \cos^2 0 \cdot \sin 0$$

$$2 = c_1 + 0 + 0$$

$$\underline{\underline{c_1 = 2}}$$

b) pro $\mathbf{y'(0) = 3}$

$$y_P' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + (-1)\sin^2 x \cdot 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \cos x$$

$$3 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 + (-1)\sin^2 0 \cdot 2\cos 0 \cdot \sin 0 + \cos^2 0 \cdot \cos 0$$

$$3 = 0 + c_2 + 0 + 1 \cdot 1$$

$$3 = c_2 + 1$$

$\underline{\underline{c_2 = 2}}$

Konečný výsledek Caughovy úlohy

$y_P = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos^2 x \cdot \sin x$

$\underline{\underline{y_P = 2 \cos x + 2 \sin x + \cos^2 x \cdot \sin x}}$

3) Najděte všechna řešení lineární diferenciální rovnice

$y''' - 5y'' + 3y'' + 9y = 0$

Řešení

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda^1 + 9\lambda^0 = 0$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$

$\underline{(\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0}$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 3$

$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-1x} = e^{-x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$

$y_3 = e^{\lambda_3 x} x = e^{3x} x$

$\underline{\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{3x} x}} \quad (c_1, c_2, c_3 \in R)$

4b) Najděte všechna řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot y$$

Řešení: ´

Matice A soustavy lineárních diferenciálních rovnic:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -5 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (1-\lambda) + 5 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-5) - 3 \cdot (2-\lambda) \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot (-1-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 1 \cdot (-5)$$
$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2) \cdot (-1-\lambda) + 0 - 15 - 0 + 5 + 5\lambda + 10 - 5\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$\Rightarrow -(\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$

Výpočet vektorů pro jednotlivé lambdy

a) pro *λ=-1*

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -3 & -9 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} +ř_1 \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-5) \\ \cdot 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{bmatrix} +ř_2 \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{u_2 = 0}}$

$3u_1 + 5 \cdot 0 + 3u_3 = 0$

$3u_1 + 3u_3 = 0$

$u_1 + u_3 = 0$

$u_1 = -u_3$

$pro\ u_1 = 1 \ \ \rightarrow \underline{\underline{u_3 = -1}}$

$\Rightarrow u = (1{,}0,-1)$

b) pro *λ=2*

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} +ř_1 \sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{v_3 = -5}}$

$5v_2 + 3v_3 = 0$

$5v_2 = -3v_3$

$v_2 = -\frac{3}{5} v_3$

$v_2 = -\frac{3}{5} \cdot (-5)$

$\underline{\underline{v_2 = 3}}$

$v_1 = -v_3$

$\underline{\underline{v_1 = -(-5) = 5}}$

$\Rightarrow v = (5{,}3,-5)$

Řešení soustav pro všechny jednotlivé lambdy:

1) $pro\ \lambda_1 = -1$

$$y = e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{u} = e^{-x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

2) $pro\ \lambda_2 = 2$

$$y = e^{\lambda_2 x} \cdot \vec{v} = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{2x} \\ 3e^{2x} \\ -5e^{2x} \end{bmatrix}$$

3) $pro\ \lambda_3 = 2$

$$y = e^{\lambda_2 x} x \cdot \vec{v} = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{2x} x \\ 3e^{2x} x \\ -5e^{2x} x \end{bmatrix}$$

Obecné řešení

$$\underline{\underline{y = c_1 \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ -e^{-x} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5e^{2x} \\ 3e^{2x} \\ -5e^{2x} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5e^{2x} x \\ 3e^{2x} x \\ -5e^{2x} x \end{bmatrix}}}$$

Poznámka: vlivem přepisu z rukou psaných výpočtů do této elektronické podoby se mohly do postupu zanést chyby (indexy, znaménka, názvy proměnných), které pak mohly vést ke správným (opět opsaným) výsledkům.