Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 1-3 (varianta č. 7)

3) Sestavte transformační matici, která provede na matici 3. řádu následující operace:

a) vymění 3. a 2. řádek
b) 1. řádek vynásobí číslem 5
c) ke 2. řádku přičte dvojnásobek 1. řádku

Řešení:

Pomocí postupné úpravy jednotkové matice:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \check{r}_3\\ \check{r}_2\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot 5\\ \\ \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ +2\cdot\check{r}_1\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&0&0\\10&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\approx T$$

Zkouška:

Libovolná matice A:

$$T\cdot A=A':\ \begin{bmatrix}5&0&0\\10&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10&15\\17&28&39\\4&5&6\end{bmatrix}$$

Ověření zvolené libovolné matice dle úprav ze zadání:

$$A':\ \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \check{r}_3\\ \check{r}_2\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot 5\\ \\ \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&10&15\\7&8&9\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ +2\cdot\check{r}_1\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&10&15\\17&28&39\\4&5&6\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ transformované matice se rovnají, výsledek je korektní.

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 1-3 (varianta č. 7)

2) Vypočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \check{r}_3 \\ \\ \check{r}_1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ -\check{r}_1 \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ +\check{r}_3 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} -\check{r}_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ -\check{r}_2 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]\begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{6} \\ \cdot \frac{1}{6} \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \check{r}_3 \\ \check{r}_2 \end{matrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Zkouška:

$$A \cdot A^{-1} = I: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ matice inverzní k matici } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ je matice } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 1-3 (varianta č. 7)

1) Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2\check{r}_1 \\ +\check{r}_1 \\ -\check{r}_1 \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +\check{r}_2 \\ +\check{r}_2 \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \check{r}_4 \\ \check{r}_3 \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_4 = s$$

$$x_3 + \frac{1}{2} \cdot s = -\frac{3}{4} \quad / \cdot 4$$

$$4 \cdot x_3 + 2 \cdot s = -3$$

$$x_3 = \frac{-2s-3}{4}$$

$$x_2 + \left(\frac{-2s-3}{4}\right) + s = -2 \quad / \cdot 4$$

$$4x_2 - 2s - 3 + 4s = -8 \quad / + 3$$

$$4x_2 + 2s = -5$$

$$x_2 = \frac{-5-2s}{4}$$

$$x_1 + \left(\frac{-5-2s}{2}\right) - \left(\frac{-2s-3}{4}\right) - 2s = 1 \quad / \cdot 4$$

$$4x_1 - 10 - 4s + 2s + 3 - 8s = 4$$

$$4x_1 - 7 - 10s = 4 \quad / + 7$$

$$4x_1 - 10s = 11$$

$$4x_1 = 11 + 10s$$

$$x_1 = \frac{11+10s}{4}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{11+10s}{4} \\ \frac{-5-2s}{4} \\ \frac{-2s-3}{4} \\ s \end{pmatrix};\ s \in R$$

Zkouška:

1. rovnice:

$$\frac{11+10s}{4} + \frac{-5-2s}{2} - \frac{-2s-3}{4} - 2s = 1 \quad / \cdot 4$$
$$11+10s-10-4s-(-2s-3)-8s=4$$
$$1+6s+2s+3-8s=4$$
$$1+3=4$$
$$\underline{\underline{4=4}}$$

2.rovnice:

$$\frac{11+10s}{4} + 5\cdot\frac{-5-2s}{4} - \frac{-2s-3}{4} - 3s = 0 \quad /\cdot 4$$
$$22+20s-25-10s-(-2s-3)-12s=0$$
$$-3-2s+2s+3=0$$
$$\underline{\underline{0=0}}$$

3.rovnice:

$$-\left(\frac{11+10s}{4}\right) - 3\cdot\frac{-5-2s}{4} + s = 1 \quad /\cdot 4$$
$$-11-10s-(-15-6s)+4s=4$$
$$-11-10s+15+6s+4s=4$$
$$\underline{\underline{4=4}}$$

4.rovnice:

$$\frac{11+10s}{4} + \frac{-5+2s}{4} + \frac{-2s-3}{2} - s = 0 \quad /\cdot 4$$
$$11+10s-5-2s-4s-6-4s=0$$
$$\underline{\underline{0=0}}$$

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 4-8 (varianta č. 7)

8) Vypočtětěte hodnosti matic $h(A)$ a $h(A|b)$ a pojednejte o řešitelnosti soustavy $Ax = b$, kde :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\check{r}_1 \\ -\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow h(A) = 1$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -(\frac{3}{2}) \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\check{r}_1 \\ -\check{r}_1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\frac{7}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow h(A|b) = 3$

Závěr:

$h(A) < h(A|b) \Rightarrow P = \{\ \}$ (Soustava nemá řešení)

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 4-8 (varianta č. 7)

7) Určete dimenzi vektorového prostoru V a své rozhodnutí zdůvodněte:
$V := \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : -x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

Řešení:

$$2a_0 - a_1 + 2a_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow a_2 = t\,; \quad a_1 = s$$

$$2a_0 - a_1 + 2a_2 = 0$$

$$2a_0 - s + 2t = 0 \quad / + s - 2t$$

$$2a_0 = s - 2t \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{s - 2t}{2}$$

$$a_0 = \frac{s}{2} - t$$

$$a = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, t \in R$$

Zkouška1:

$$2 \cdot (-1) - 0 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$-2 + 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Zkouška2:

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Nyní zjistíme, zda jsou oba vektory vektory báze, tedy zda jsou lineárně nezávislé. Pro nezávislost musí platit podmínka:

$$\alpha_1 \cdot a_t + \alpha_2 \cdot a_s = 0$$

Po dosazení tedy řešíme následující soustavu rovnic:

$-1\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0$

$0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 0$

$1\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = 0\,;\,\alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow$ rovnice má pouze triviální řešení, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, množina vektorů je tedy lineárně nezávislá $\Rightarrow$ můžeme napsat, že množina vektorů a_s a a_t je báze vektorového prostoru *V*. Vektorový prostor *V* je tak lineárním obalem množiny $S = \{[\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0],[-1 \quad 0 \quad 1]\}$, dimenze vektorového prostoru *V* (počet lineárně nezávislých vektorů báze) je tedy $d = 2$.

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 4-8 (varianta č. 7)

6) Najděte bázi vektorového prostoru V a dle definice dokažte, že se jedná o bázi, kde
$V := \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : \quad -x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

Řešení:

$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$\underline{x_1 - x_2 + x_3 = 0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + \check{r}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 = t\ ;\ x_2 = s$$

$-x_1 + s - t = 0$
$-x_1 = t - s$
$x_1 = s - t$

$$x = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, t \in R$$

Zkouška1:
$-(s-t) + s - t = 0$
$t - s + s - t = 0$
$0 = 0$
Zkouška2:
$s - t - s + t = 0$
$0 = 0$

Soustava má tedy řešení $x = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, t \in R$, odtud
$V = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : \quad x = s \cdot [1 \quad 1 \quad 0] + t \cdot [-1 \quad 0 \quad 1], s, t \in R\}$. Vektorový prostor V je tak lineárním obalem množiny $S = \{[1 \quad 1 \quad 0], [-1 \quad 0 \quad 1]\}$, píšeme
$V = \langle [1 \quad 1 \quad 0], [-1 \quad 0 \quad 1] \rangle$. Množina S je báze prostoru V. Důkaz dle definice:
Konečná množina ε vektorů vektorového prostoru V je báze vektorového prostoru V, jestliže platí:

ε je nezávislá:
Zjišťujeme, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé,musí pak pro ně platit:

$\alpha_1 \cdot x_s + \alpha_2 \cdot x_t = 0$

Po dosazení řešíme následující soustavu rovnic:

$1\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = 0$

$1\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0$

$0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_2 = 0\,;\, \alpha_1 = 0$$

$\alpha_1 \cdot x_s + \alpha_2 \cdot x_t = 0$

$0 \cdot x_s + 0 \cdot x_t = 0$

$0 = 0$

Množina vektorů $S = \{x_s . x_t\}$ má pouze triviální řešení , tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, je tedy lineárně nezávislá = podmínka definice je splněna.

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 4-8 (varianta č. 7)

5) Mějme vektorový prostor $P_3 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in R\}$ **. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:**
$p(x) = x^2 - x - 1,\ q(x) = -x^2 - 2x + 1,\ r(x) = -2x^2 + 2x + 4$

Řešení:

$$\alpha_1 \cdot p(x) + \alpha_2 \cdot q(x) + \alpha_3 \cdot r(x) = 0$$
$$\underline{\alpha_1 \cdot (x^2 - x - 1) + \alpha_2 \cdot (-x^2 - 2x + 1) + \alpha_3 \cdot (-2x^2 + 2x + 4)}$$
$$x^2 : \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$$
$$x \ : -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3)$$
$$\underline{\mathrm{x}^0 : -\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3}$$

Řešíme soustavu rovnic pomocí příslušné matice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +\check{r}_1 \\ +\check{r}_1 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_3 = 0\,;\, \alpha_2 = 0\,;\, \alpha_1 = 0$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Množina vektorů P má pouze triviální řešení, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Domácí úkoly LA 4-8 (varianta č. 7)

4) Určete, zda jsou zadané množiny *U* a *V* vektorové podporostory *C* nad *R*, přičemž *U* je množina všech ryze imaginárních čísel a *V* je množina všech iracionálních čísel.

Řešení:

Neprázdná množina U (V) $\subset$ C nad R je podprostorem vektorového prostoru C nad R právě tehdy, když U (V) je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru C nad R.

Tedy množina U je podprostorem C nad R, neboť platí, že pro sčítání libovolných imaginárních čísel i pro násobení skalárem $\alpha \in R(C)$ bude definováno v prostoru C nad R.

Naopak množina iracionálních čísel V není podprostorem C nad R, neboť neplatí, že pro libovolné násobneí skalárem $\alpha \in R(C)$nebude a libovolného iracionálního čísla bude výsledný stav náležet do oboru imaginárních čísel (Např pro součin skalárem ($\alpha = \sqrt{2}; a = \sqrt{2};\ a \in V,\ \alpha \in R,\ avšak\ (\alpha \cdot a) \notin V, neboť\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2;\ 2 \notin V$).

Užitím Cramerova pravidla vyřešte následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 &- x_3 &- 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 &+ 5x_2 &- x_3 & &= 7 \\ -x_1 &- 3x_2 &+ x_3 &+ x_4 &= -3 \\ x_1 & &+ 2x_3 & &= 1 \end{aligned}$$

Výpočer determinantu D :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\check{r}_1 \\ +\check{r}_1 \\ -\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +\check{r}_1 \\ +2\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \check{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-1] = -1$$

Výpočet determinantu Dx:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \check{r}_4 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -7\check{r}_1 \\ +3\check{r}_1 \end{matrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 5 & -15 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \check{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\check{r}_1 \\ +3\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 1$$

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Oprava domácí úkoly LA 9 (varianta č. 7)

9) Je dáno lineární zobrazení $A: R^3 \to R^3$ definované předpisy:

$A((1,1,-1)) = (1,1,0)$
$A((1,-1,1)) = (2,1,2)$
$A((-1,1,1)) = (1,1,0)$

Nalezněte $A((1,-1,0))$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\check{r}_1 \\ +\check{r}_1 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +\check{r}_2 \\ \\ \\ \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +\check{r}_3 \\ \\ \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \check{r}_3 \\ \check{r}_2 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$e_1 = \left(\frac{3}{2},1,1\right)$
$e_2 = (1,1,0)$
$e_3 = \left(\frac{3}{2},1,1\right)$

$f(u) = f(e_1)\cdot u_1 + f(e_2)\cdot u_2 + f(e_3)\cdot u_3$
$f(u) = 1\cdot\left(\frac{3}{2},1,1\right) + (-1)\cdot(1,1,0) + 0\cdot\left(\frac{3}{2},1,1\right)$
$f(u) = \left(\frac{3}{2},1,1\right) + (-1,-1,0) + (0,0,0)$
$\underline{\underline{f(u) = \left(\frac{1}{2},0,1\right)}}$

Určete derivaci a vypočtěte určitý integrál po částech linární funkce f definované na intervalu následovně:

$$f(x) = \begin{matrix} 2 & x \in \langle 0,1) \\ -x+5 & x \in \langle 1,3) \\ -1{,}5x+9 & x \in \langle 3,4) \\ 2x-5 & x \in \langle 4,5\rangle \end{matrix}$$

Řešení:

Výpočet jednotlivých určitých integrálů funkcí definovaných na daných intervalech:

$$\int_0^1 2\,dx = 0$$

$$\int_1^3 (-x+5)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_1^3 = \left(-\frac{1^2}{2}+5\cdot 1\right)-\left(-\frac{3^2}{2}+5\cdot 3\right) = \left(-\frac{1}{2}+5\right)-\left(-\frac{9}{2}+15\right) =$$

$$= \frac{9}{2}-\frac{21}{2} = -\frac{12}{2} = 6$$

$$\int_3^4 (-1{,}5x+9)\,dx = \int_3^4 \left(-\tfrac{3}{2}x+9\right)dx = \left[-\frac{3}{4}x^2+9x\right]_3^4 = \left(-\frac{3}{4}\cdot 4^2+9\cdot 4\right)-\left(-\frac{3}{4}\cdot 3^2+9\cdot 3\right) =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\cdot 16+36\right)-\left(-\frac{3}{4}\cdot 9+27\right) = (-12+36)-\left(-\frac{27}{4}+27\right) = 24-\frac{81}{4} = \frac{96-81}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\int_4^5 (2x-5)\,dx = \left[x^2-5x\right]_4^5 = (5^2-5\cdot 5)-(4^2-5\cdot 4) = 25-25-(16-20) = 0-(-4) = 4$$

Výpočet derivace zadané lineární funkce:

$f_1 = 2 \quad x \in \langle 0,1)$

$f'_1 = 0$

$f_2 = -x+5 \quad x \in \langle 1,3)$

$f_2' = -1+0 = -1$

$f_3 = -1{,}5x+9 \quad x \in \langle 3,4)$

$f_3' = -1{,}5+0 = -1{,}5$

$f_4 = 2x-5$

$f_4' = 2-0 = 2$

Zjistěte, které vektory $e_1 = (1,0,-1,0)^T$, $e_2 = (0,1,0,0)^T$ a $e_3 = (2,0,-2,0)^T$ jsou vlastními vektory matice $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vektory e_1, e_2, e_3 jsou vlastními vektory matice A s vlastními čísly -8,8,-8

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Oprava domácí úkoly LA 9 (varianta č. 7)

10)Určete, zda zobrazení $B: R^3 x R^3 \to R$ definované předpisem $B(u,v) = u_1v_1 - v_2u_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_2v_3 + u_3v_2 - 2u_1v_3$ je bilineární forma, přičemž $u,v \in R^3, [u]\varepsilon = [u_1,u_2,u_3], [v]\varepsilon = [v_1,v_2,v_3], kde\ \varepsilon$ je nějaká báze v R3. Pokud ano, sestavte její matici vůči bázi ε.

Řešení:

Ověření podmínek bilineární formy:

$$B(u+v,w) = (u_1+v_1)w_1 - (u_2+v_2)w_2 - 3(u_3+v_3)w_3 - 3(u_1+v_1)w_2 + 6(u_2+v_2)w_1 - (u_2+v_2)w_3 +$$
$$+(u_3+v_3)w_2 - 2(u_1+v_1)w_3 = u_1w_1 - v_2w_2 - 3v_3w_3 - 3v_1w_1 + 6v_2w_1 - v_2w_3 + v_3w_2 - 2v_1w_3 =$$
$$= B(u,w) + B(v,w)$$
$$B(u,w) + B(v,w) = B(u,v+w) = u_1(v_1+w_1) - u_2(v_2+w_2) - 3u_3(v_3+w_3) - 3u_1(v_2+w_2) + 6u_2(v_1+w_1) -$$
$$-u_2(v_3+w_3) + u_3(v_2+w_2) - 2u_1(v_3+w_3) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_3v_2 - 2u_1w_3 =$$
$$= B(u,w) + B(v,w)$$
$$B(\alpha \cdot u, v) = (\alpha \cdot u_1)v_1 - (\alpha \cdot u_2)v_2 - 3(\alpha \cdot u_3)v_3 - 3(\alpha \cdot u_1)v_2 + 6(\alpha \cdot u_2)v_1 - (\alpha \cdot u_2)v_3 + (\alpha \cdot u_3)v_2 -$$
$$-2(\alpha \cdot u_1)v_3 = \alpha(u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_2v_3 + u_3v_2 - 2u_1v_3) = \alpha \cdot B(u,v)$$
$$B(u, \alpha \cdot v) = u_1(\alpha \cdot v_1) - u_2(\alpha \cdot v_2) - 3u_3(\alpha \cdot v_3) - 3u_1(\alpha \cdot v_2) + 6u_2(\alpha \cdot v_1) - u_2(\alpha \cdot v_3) + u_3(\alpha \cdot v_2) -$$
$$-2u_1(\alpha \cdot v_3) = \alpha \cdot (u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_2v_3 + u_3v_2 - 2u_1v_3) = \alpha \cdot B(u,v)$$

$\Rightarrow$ jedná se o bilineární formu

Určení matice vůči standardní bázi $\varepsilon = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$:
Výpočet jednotlivých souřadnic matice:

$$B(e_1,e_1) = 1 \cdot 1 - 00 + 300 - 310 + 601 - 00 + 00 - 210 = 1 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 1$$
$$B(e_1,e_2) = 10 - 01 - 300 - 311 + 600 - 00 + 01 - 200 = 0 - 0 - 0 - 3 + 0 - 0 + 0 - 0 = -3$$
$$B(e_1,e_3) = 10 - 00 - 301 - 310 + 600 - 01 + 00 - 211 = 0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 2 = -2$$
$$B(e_2,e_1) = 01 - 10 - 300 - 300 + 611 - 10 + 00 - 200 = 0 - 0 - 0 - 0 + 6 - 0 + 0 - 0 = 6$$
$$B(e_2,e_2) = 00 - 11 - 300 - 301 + 610 - 10 + 01 - 200 = 0 - 1 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = -1$$
$$B(e_2,e_3) = 00 - 10 - 301 + 300 + 610 - 11 + 00 - 201 = 0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 1 + 0 - 0 = -1$$
$$B(e_3,e_1) = 01 - 00 - 310 - 300 + 601 - 00 + 10 - 200 = 0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$
$$B(e_3,e_2) = 00 - 01 - 310 - 301 + 600 - 00 + 11 - 200 = 0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 + 1 - 0 = 1$$
$$B(e_3,e_3) = 00 - 00 - 311 - 300 + 600 - 01 + 10 - 201 = 0 - 0 - 3 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = -3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jméno: Martin Dočkal
Skupina: LB106
Série: Oprava domácí úkoly LA 9 (varianta č. 7)

11) Nalezněte předpis a matici kvadratické formy $Q(u)$ příslušné k bilineární formě $B(u,v)$ z příkladu 10, a to vůči bázi ε. Kvadratickou formu uveďte do kanonického tvaru a určete její typ.

Řešení:
Určení předpisu:
$$Q_B(u) = u_1^2 - u_2^2 - 3u_2^2 - 3u_1u_2 + 6u_2u_1 - u_2u_3 + u_3u_2 - 2u_1u_3$$

Určení matice: k výpočtu hodnot jednotlivých souřadnic kvadratické formy $Q(u)$ příslušné k bilineární formě $B(u,v)$ využijeme právě předpis této bilineární formy, resp. její symetrickou část:
$$B_S(u,v) = \tfrac{1}{2}(B(u,v) + (v,u)) = \frac{1}{2}\cdot(u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_2v_3 + u_3v_2 - 2u_1v_3 + u_1v_1 -$$
$$- u_2v_2 - 3u_2v_2 - 3u_2v_1 + 6u_1v_2 - u_3v_2 + u_2v_3 - 2u_3v_1) = \frac{1}{2}\cdot(2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 6u_3v_3 + 3u_1v_2 + 3u_2v_1 -$$
$$- 2u_1v_3 - 2u_3v_1)$$

volíme standardní bázi $e = \{(1,0,0);(0,10);(0,0,1)\}$
Výpočet jednotlivých složek matice kvadratické formy:
$$B_S(e_1,e_1) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 - 6\cdot0\cdot0 + 3\cdot1\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot1) = 1$$
$$B_S(e_1,e_2) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 - 6\cdot0\cdot0 + 3\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot0) = \tfrac{3}{2}$$
$$B_S(e_1,e_3) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot0 - 6\cdot0\cdot1 + 3\cdot1\cdot0 + 3\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot0) = -1$$
$$B_S(e_2,e_1) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 - 6\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot0 + 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot00 - 201) = \tfrac{3}{2}$$
$$B_S(e_2,e_2) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 - 6\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 + 3\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot0) = -1$$
$$B_S(e_2,e_3) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot0 - 6\cdot0\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 + 3\cdot1\cdot0 + 2\cdot0\cdot1 - 2\cdot0\cdot0) = 0$$
$$B_S(e_3,e_1) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 - 6\cdot1\cdot0 + 3\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot1) = -1$$
$$B_S(e_3,e_2) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 - 6\cdot1\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot0 - 2\cdot1\cdot0) = 0$$
$$B_S(e_3,e_3) = \tfrac{1}{2}\cdot(2\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot0 - 6\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 - 2\cdot1\cdot0) = -3$$

$\Rightarrow$ matice kvadratické formy:
$$[Q_B]_E = [B_S]_E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Úpravy pro určení typu matice:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{matrix} \check{r}_3 \\ \\ \check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 6 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \cdot 3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ -6 & 18 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 18 \\ -12 & 18 & 36 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\check{r}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 18 \\ 0 & 18 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 18 \\ 0 & 18 & 48 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 9 \\ \cdot 2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 162 \\ 0 & 36 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -324 & 324 \\ 0 & 324 & 192 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\check{r}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -324 & 324 \\ 0 & 0 & 516 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -324 & 0 \\ 0 & 0 & 516 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Protože matice kvadratické formy v kanoickém tvaru nabývá na hlavní diagonále jak kladných, tak záporných hodnot, tvrdíme pak, že daná kvadratická forma je indefinitní.